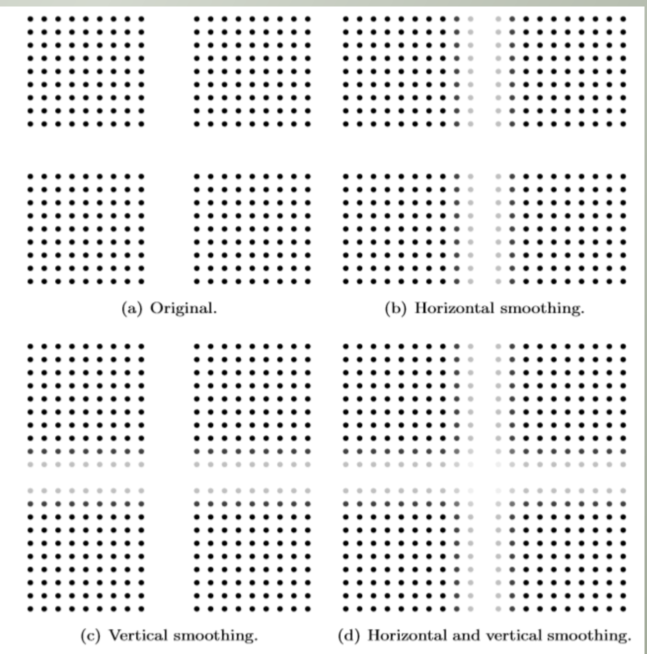
T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN EDEBİYAT FAKÜLTESİ
MATEMATİK BÖLÜMÜ

TENSÖR ÇARPIMI

EBRAR NUR TAHİNCİOĞLU 17025018
DANIŞMAN:DOÇ.DR.ERDAL GÜL

DFT, DCT ve dalgacık dönüşümünün tümü, tek değişkenli vektörler veya fonksiyonlar için taban değişiklikleri olarak tanımlanır ve bu nedenle, görüntüler gibi daha yüksek boyutlu verilere doğrudan uygulanamazlar. Burada, bu tür tek boyutlu şemaları iki ya da daha yüksek)boyutlu şemalara genişletmek için basit bir yöntem sunacağız. Temel bileşen, tensör çarpımı yapısıdır. Bu yapı tek boyutlu benzerlerinden iki boyutlu fonksiyonlar ve filtreler oluşturmak için genel bir araç olup, ses ve görüntülere yönelik filtreleme ve sıkıştırma tekniklerini genelleştirmemize olanak tanır. Dikdörtgen bir alan üzerinde iki boyutlu ayrık bir fonksiyon, örneğin bir görüntü, 0 < *i* < *M*-1 ve 0 < *j* < *N*-1 için $X_{i,j}$ elemanları ile bir *X* matris inin terimleri cinsinden uygun bir şekilde temsil edilir. Filtreleri *X*'e uygulamanın bir yolu matrisi sütun sütun uzun bir vektöre yeniden düzenlemek olacaktır.



(a) Original. (b) Horizontal smoothing.

(c) Vertical smoothing. (d) Horizontal and vertical smoothing.

- **Şekil 1:** Bir görüntüyü {1/4, 1/2, 1/4} filtresiyle yatay, dikey ve her ikisinde de yumuşatmanın sonuçları. Pikseller, piksel değerlerine karşılık gelen yoğunluğa sahip diskler olarak gösterilir.

(a)'da basit bir görüntü örneği gösterilmektedir. Filtrelerin sırasıyla satır ve sütunlara uygulanması **(b)** ve **(c)**'de görüldüğü gibi görüntüyü yalnızca yatay veya dikey olarak düzleştirecektir. Peki başka ne yapabiliriz? Elbette önce görüntünün tüm satırlarını düzeltebilir ve ardından elde edilen görüntünün sütunlarını düzeltebilriz. Bunun sonucu **(d)**'de gösterilmiştir.

Tanım 1.1 (Vektörlerin Tensör çarpımları): x, y sırasıyla M ve N uzunluğundaki vektörler ise tensör çarpımları $x \otimes y$ olarak

$$(x \otimes y)_{i,j} = xiyj$$

ile tanımlanan MxN-matrisi olarak tanımlanır. Diğer bir deyişle

$$x \otimes y = xy^T$$

dir.

Teorem1 (Matrislerin Tensör Çarpımlarının Uygulanması): Eğer $S: \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}^M, T: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ matrisleri ve $X \in L_{M,N}(\mathbb{R})$ için $(S \otimes T)X$ ifadesi aşağıdaki gibi hesaplanır:

- X in her sütununa S uygulanır.
- Elde edilen matrisin transpozu alınır.
- Elde edilen matristeki her sütuna T uygulanır.
- Elde edilen matrisin transpozu alınır.

Teorem1.13 (Tensör Çarpımlarında Koordinat Değişimlerinin Uygulanması): $C_1 \otimes C_2$ den $B_1 \otimes B_2$ ye değişimi aşağıdaki gibi uygulanabilir:

1. $C_1 \otimes C_2$ deki koordinat matrisindeki her sütun için koordinatları C_1 den B_1' e değiştirilir.
2. Elde edilen matrisin transpozu alınır.
3. Elde edilen matristeki her sütun için koordinatları C_2 den B_2 ye değiştirilir.
4. Elde edilen matrisin transpozu alınır.

Görüntülerle ilgili aşağıdaki işlemlerde, bir görüntüdeki piksel değerlerini standart tabanda koordinat olarak görselleştiriyoruz ve koordinat değişikliği gerçekleştiriyoruz.

DFT:(Discrete Fourier Transform) Kısmi koordinat değişimlerinden biridir.
DCT:(Discrete Cosine Transform) Dalgayı kosinüslerin toplamı şeklinde yazma tekniğine denir.

(a) **(b)** **(c)**

(a) Başlangıç değeri 30. DFT değerlerinden %91.3'ü ihmal edilmiştir.

(b) Başlangıç değeri 50. DFT değerlerinden %94.9'u ihmal edilmiştir.

(c) Başlangıç değeri 100. DFT değerlerinden %97.4'ü ihmal edilmiştir.

- **Şekil 2:** DFT ile dönüştürüldüğünde görüntü üzerindeki etki ve belirli bir eşiğin altındaki DFT katsayıları ihmal edilmiştir.

(a) **(b)** **(c)**

(a) Başlangıç değeri 30. DCT değeri %93,9 ihmal edildi.
(b) Başlangıç değeri 50. DCT değeri %96,0 ihmal edildi.
(c) Başlangıç değeri 100. DCT değeri %97,6 ihmal edildi.

- **Şekil 3**: DCT ile dönüştürüldüğünde bir görüntü üzerindeki etki ve belirli bir eşiğin altındaki DCT katsayıları ihmal edilmiştir.

KAYNAKÇA:

[1] W. Voigt, Die fundamentalen physikalischen Eigenschaften der Krystalle in elementarer Darstellung, Verlag von Veit & Comp., Leipzig, 1898.

[2] R. Wald, “General Relativity,” Univ. Chicago Press, Chicago, 1984.